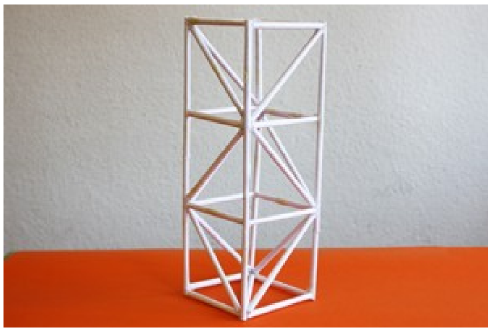
Geometría y Medida en el plano

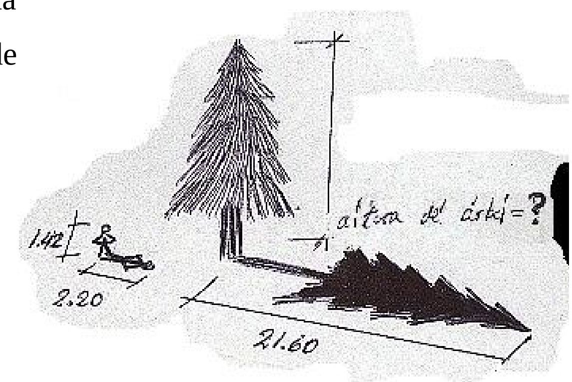
¿Qué problemas vamos a resolver?

Haz un dibujo de la situación en los problemas siguientes, coloca los datos conocidos y los que se desean conocer.

1. Para crear la siguiente estructura se construyen varillas de papel, si las más cortas (las horizontales y verticales) miden 10 cm, ¿cuánto deben medir las más largas (diagonales)?

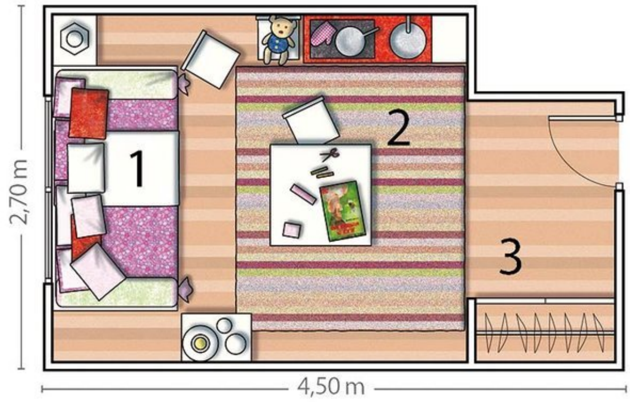


2. Si un árbol proyecta una sombra de 21'60 m a la misma hora que una persona de 1'42 m proyecta una sombra de 2'20 m, ¿cuál es la altura del árbol?



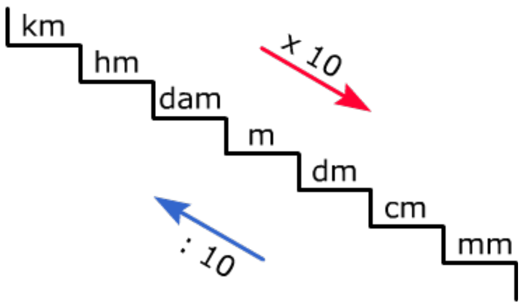
3. En la casa de Joaquín han instalado una piscina. Por seguridad, quieren poner una cerca (como malla) que cubra todo el contorno. Si la piscina tiene forma rectangular, siendo su largo 9m y su ancho 5m, ¿cuántos metros de malla necesitan para asegurar la piscina?

4. La habitación siguiente está a escala pero no sabemos a qué escala, ¿podrías averiguarlo? Si se desea poner suelo a 15€ el metro cuadrado, ¿cuánto nos gastaremos?

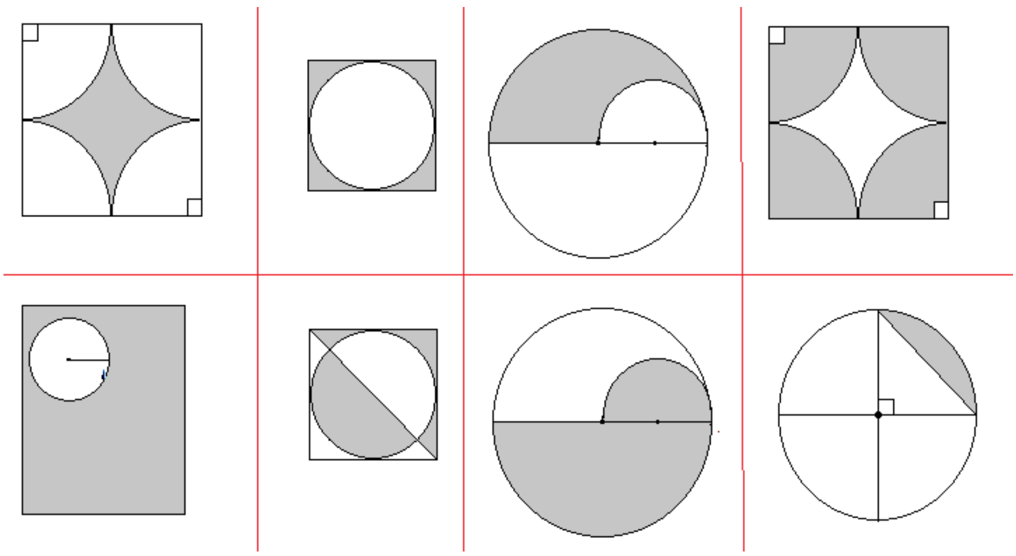


1.- Perímetro y área. Medidas directas

La palabra perímetro viene del griego peri (alrededor) y metro (medida), y se refiere a la medida de longitud del contorno de una figura, como el problema 3 de la introducción. Recuerda las unidades de longitud, necesarias para medir:



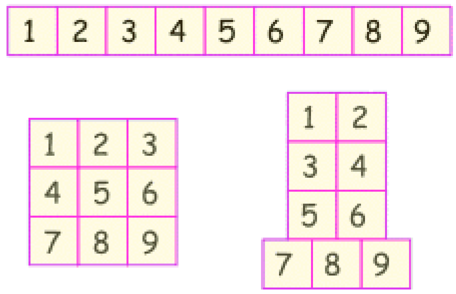
Pinta el perímetro de las siguientes figuras (imagina que es un terreno que quieres vallar, el perímetro sería la valla):



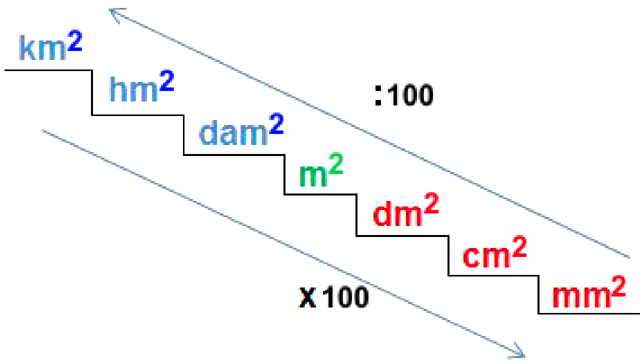
El perímetro se puede medir directamente en muchas ocasiones, pero la mayoría de las veces es necesario descomponer el contorno y sumar las longitudes, e incluso algunas no se pueden medir directamente. En los apartados siguientes veremos cómo resolver dicha cuestión.

¿Cuántos metros de valla se necesitan en el problema 3?, ¿cómo lo calculas?

El área de una figura es la medida de su superficie, del interior de la figura (imagina que vas a pintar una pared, o a sembrar un terreno) y para hallarla es necesaria una unidad de referencia. Las tres figuras de de la derecha, por ejemplo, tienen el mismo área porque contienen el mismo número de unidades (cada cuadrado)

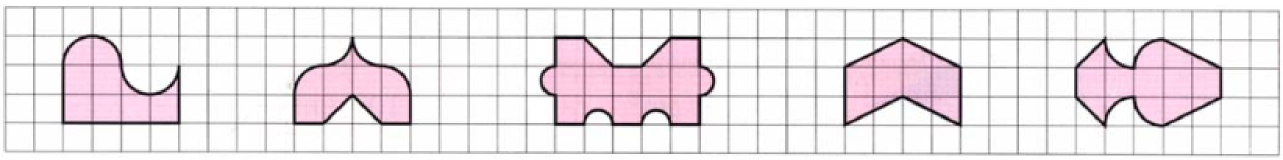


Recuerda las unidades de medida de áreas (1 metro cuadrado es la medida de la superficie de un cuadrado de un metro de lado):



Para calcular áreas de forma directa un área habría que contar el número de unidades que contiene el interior de la figura. La mayoría de las áreas se calculan de forma indirecta, mediante fórmulas que dependen del tipo de figura, como se verá en el último apartado del tema.

Usando como unidad de superficie el cuadrado de la cuadrícula calcula el área de estas figuras:



En el problema 4 dibuja cuadrados de 1 m x 1 m y aproxima la superficie para saber el precio final del suelo.

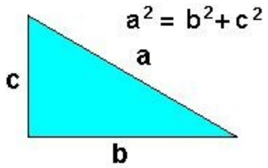
2.- MEDIDAS INDIRECTAS DE LONGITUDES: PITÁGORAS Y TALES

En muchas ocasiones algunas medidas no se pueden obtener por medición directa con un instrumento de medida y es necesario utilizar algunos resultados o fórmulas. Las primeras fórmulas se introducen en este apartado y tienen que ver con medidas en triángulos, que son los polígonos más básicos pero también los más importantes, ya que muchas situaciones reales tienen como modelo un triángulo o se pueden descomponer en varios triángulos.

En el primer problema de la introducción se utiliza como modelo de la situación un triángulo rectángulo del que conocemos dos de los lados y desconocemos otro, por lo que necesitaríamos una relación entre los tres lados (los catetos, que son los que forman el ángulo recto, y la hipotenusa que es el lado opuesto a dicho ángulo). Esta relación, como ya has visto en cursos anteriores, se conoce con el nombre de Teorema de Pitágoras.

Lo que dice el teorema de Pitágoras, que se llama así porque se dice que Pitágoras (o el grupo de los pitagóricos, no está muy claro) dio una demostración del mismo para todos los triángulos rectángulos, es que <u>en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.</u>

Esquemáticamente:



El teorema también dice que <u>si se cumple la igualdad con los lados de un triángulo, el triángulo será rectángulo,</u> lo que serviría para comprobar, midiendo los lados, si un triángulo es rectángulo o no.

Utilizando este teorema es posible resolver multitud de problemas que implican medidas indirectas. En el primer problema, por ejemplo, los catetos de los triángulos miden 10 cm, por lo que la hipotenusa medirá

$$\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}\approx 14\,cm$$

Resuelve los siguientes problemas:

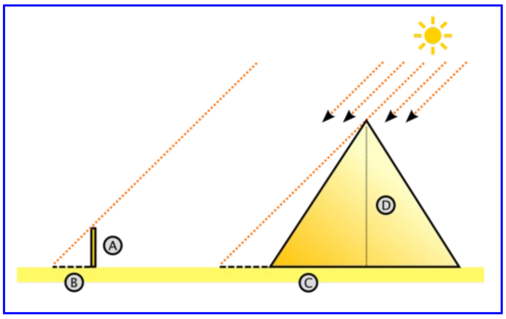
1. La distancia entre la base de la torre inclinada de Pisa y su parte más alta es de 56 m. La torre está desviada 4 m de la vertical. Encuentra la distancia desde la parte más alta de la torre hasta el piso.

2. Construimos una ventana rectangular de 2 m de largo por 1,20 m de ancho. Para mantenerla mientras estamos construyendo la pared, queremos ponerle un travesaño diagonal que la refuerce. ¿Qué longitud debe tener dicho travesaño?

3. Para sujetar una antena de 13m de alto, se proyecta colocar 3 cables de acero. Si desea que el punto de enganche del cable este a una distancia de 4m de la base de la antena. ¿Cuantos metros de cable se necesitaran?

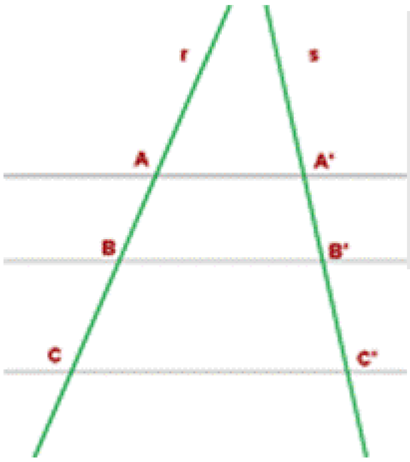
4. Si se hacen nudos en una cuerda, de manera que quede dividida en doce partes iguales, y se forma un triángulo con la misma, uniendo los extremos y doblando por el cuarto y el séptimo nudo, podremos trazar perpendiculares utilizando el triángulo. Explica por qué (Pista: para trazar perpendiculares se necesita un ángulo recto)

Según la leyenda, Tales de Mileto visitó las pirámides de Guiza en Egipto, construidas varios siglos antes. Admirado ante tan portentosos monumentos de esta civilización, quiso saber su altura. Trató este problema con semejanza de triángulos (y bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos), pudo establecer una relación de semejanza entre dos triángulos rectángulos, por un lado el que tiene por catetos a la longitud de la sombra de la pirámide (conocible) y la longitud de su altura (desconocida), y por otro lado, valiéndose de una vara (clavada en el suelo de modo perfectamente vertical) cuyos catetos conocibles son, la longitud de la vara y la longitud de su sombra.



Tales es famoso por el siguiente teorema, que tiene múltiples aplicaciones, entre ellas demostrar los criterios de semejanza de triángulos que expondremos más adelante y nos servirán para resolver los problemas de semejanza de triángulos como el segundo problema de la introducción.

TEOREMA DE TALES

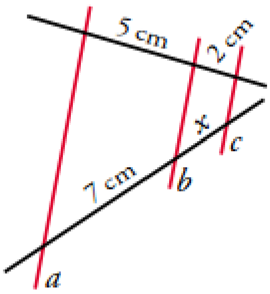


Si dos rectas cualesquiera (r y s) se cortan por varias rectas paralelas (AA’, BB’, CC’) los segmentos determinados en una de las rectas (AB, BC, AC) son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra (A’B’, B’C’, A’C’).

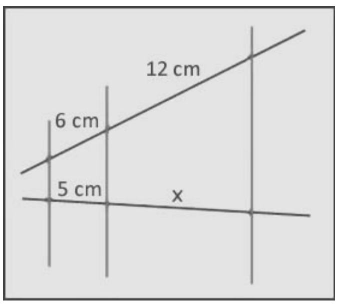
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Calcula el valor *x* en las siguientes figuras utilizando el teorema de Tales:

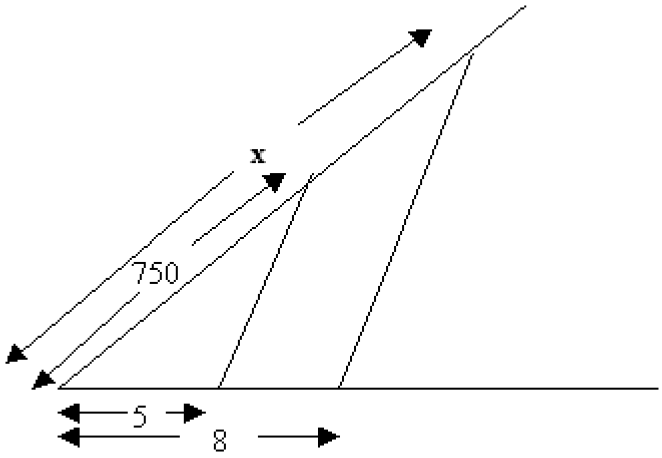
a)



b)



c)



Divide el segmento CD en 3 partes proporcionales a 2, 3, 5 utilizando el teorema de Tales.

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma aunque no tengan el mismo tamaño. Para que dos polígonos (dos triángulos, dos cuadriláteros, dos pentágonos, etc...) sean semejantes, es decir, para que tengan la misma forma se tienen que cumplir dos condiciones:

SEMEJANZA DE POLÍGONOS:

Dos polígonos son semejantes si cumplen:

✔ Tienen ángulos iguales

✔ Los lados que forman cada ángulo de un polígono son proporcionales a los lados que forman el ángulo igual del otro polígono (lados homólogos)

La razón entre los lados de un polígono y sus homólogos es siempre la misma y se llama RAZÓN DE SEMEJANZA

Por ejemplo, los trapecios de la figura siguiente son semejantes porque:

- los ángulos son iguales: A=A', B=B', C=C', D=D',
- los lados correspondientes a A son proporcionales a los lados correspondientes a A':

$$\frac{9}{3}=3=\frac{33}{11}$$

- los lados correspondientes a B son proporcionales a los lados correspondientes a B':

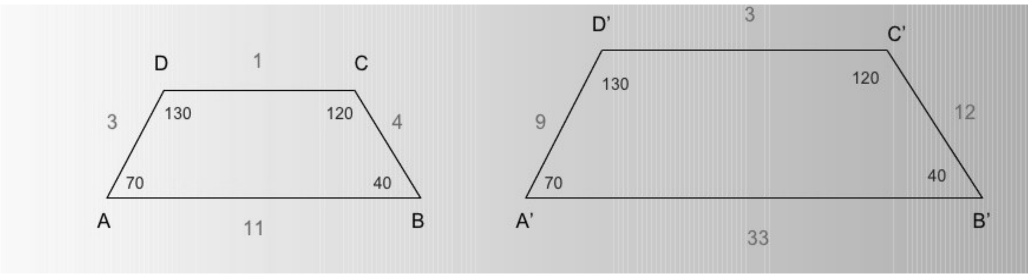
$$\frac{12}{4}=3=\frac{33}{11}$$

- los lados correspondientes a C son proporcionales a los lados correspondientes a C':

$$\frac{12}{4}=3=\frac{3}{1}$$

- los lados correspondientes a D son proporcionales a los lados correspondientes a D':

$$\frac{9}{3}=3=\frac{3}{1}$$

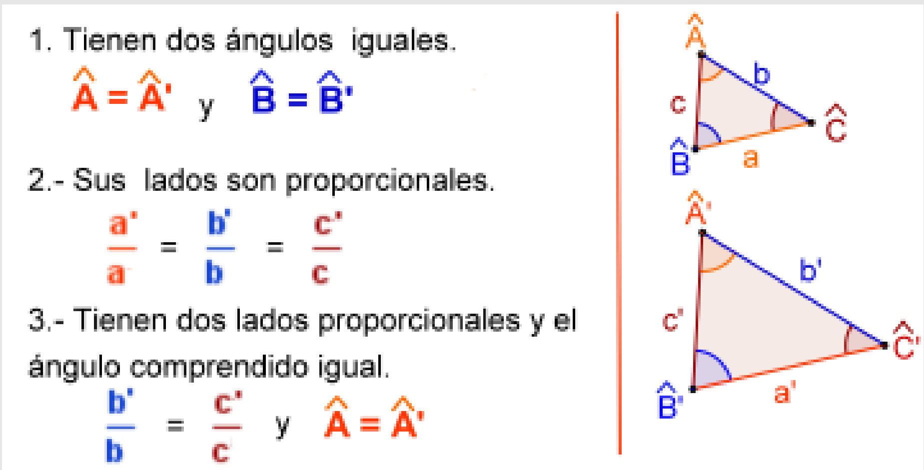


Podemos escribir: $\frac{9}{3}=\frac{33}{11}=\frac{12}{4}=\frac{3}{1}=3$ y 3 será la razón de semejanza.

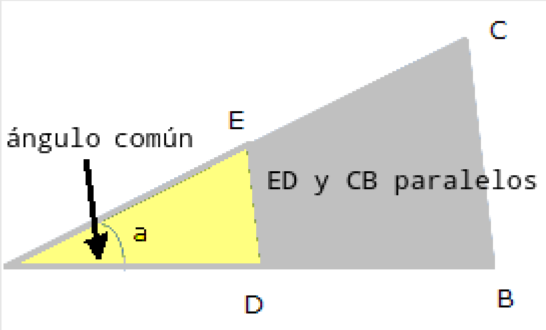
Cuando se trabaja con triángulos no es necesario comprobar que los tres ángulos son iguales y los lados proporcionales, basta con aplicar una de las tres condiciones siguientes o comprobar que están en posición de Tales.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS:

✔ Dos triángulos son semejantes si cumple una de estas condiciones o CRITERIOS DE SEMEJANZA (basta con una)

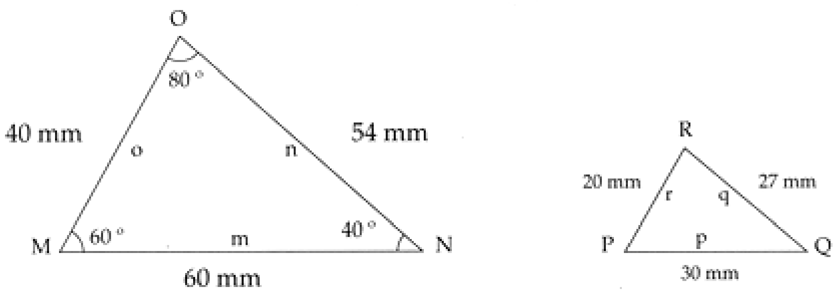


✔ Dos triángulos son semejantes si están en posición de Tales: comparten un ángulo y los lados opuestos a dicho ángulo son paralelos

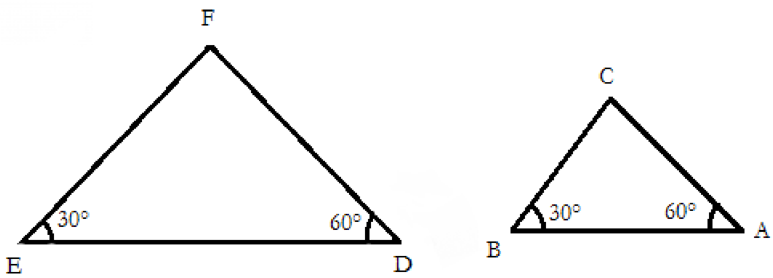


Explica si los siguientes triángulos son semejantes o no utilizando los criterios anteriores:

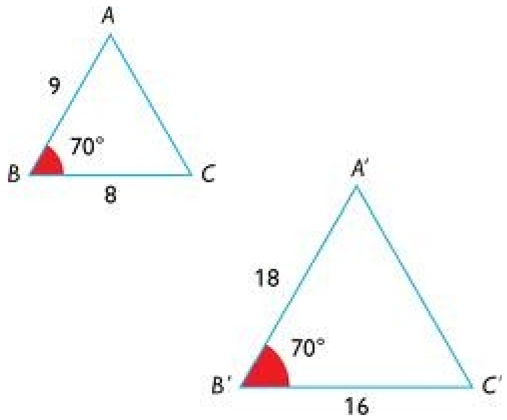
a)



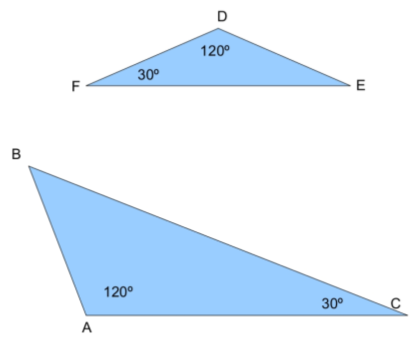
b)



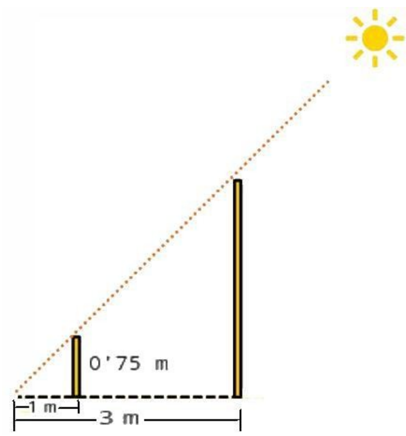
d)



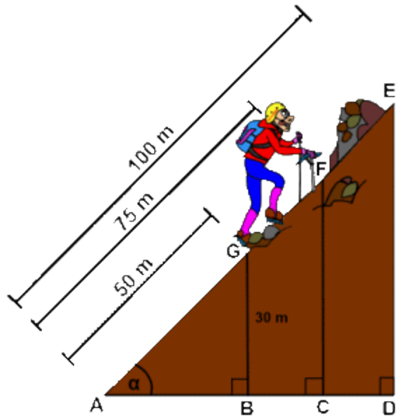
c)



e)

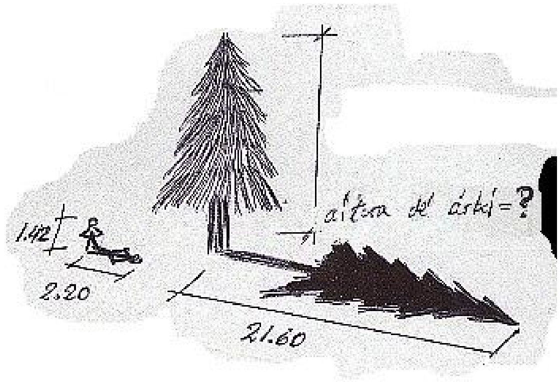


f)

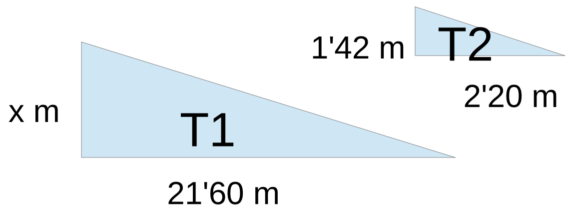


El primer criterio se aplica mucho en la resolución de problemas. Veamos dos ejemplos (el primero es el de la introducción):

1.- Si un árbol proyecta una sombra de 21'60 m a la misma hora que una persona de 1'42 m proyecta una sombra de 2'20 m, ¿cuál es la altura del árbol?



El árbol, su sombra y el rayo solar que la forma forman el triángulo T1; la persona, su sombra y el rayo solar forman otro triángulo T2 . Los triángulos T1 y T2 son semejantes porque tienen dos ángulos iguales, uno de 90º porque tanto el árbol como la persona están perpendiculares al suelo, y el que forma el rayo de sol con el suelo porque los rayos del sol son paralelos.

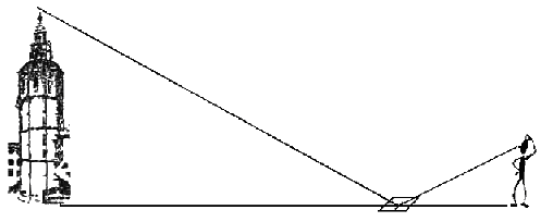


Como los triángulos son semejantes sus lados son proporcionales:

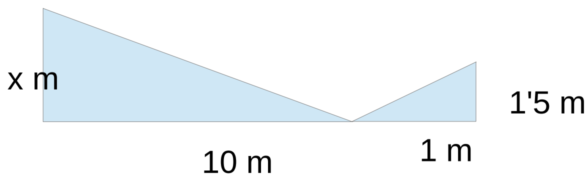
$\frac{x}{1'42}=\frac{21'60}{2'20}$ x·2'20=1'42·21'60 x·2'20=30' 672 x= 30'672/2'20≈14 m

Así que el árbol mide aproximadamente 14 metros.

2.- ¿Cómo determinarías la altura de un edificio con ayuda de un espejo situado a 10 m del edificio si se ve la parte alta cuando nos alejamos 1 m del espejo si la altura de nuestros ojos es de 1'5 m?



El edificio, la parte del suelo que va desde el edificio hasta el espejo y el rayo que va desde el final del edificio al espejo forman el triángulo T1; la persona, la parte del suelo que va desde la persona hasta el espejo y el rayo reflejado forman otro triángulo T2 .



Los triángulos T1 y T2 son semejantes porque tienen dos ángulos iguales, uno de 90º porque tanto el edificio como la persona están perpendiculares al suelo, y el que forma el rayo incidente y el reflejado.

Como los triángulos son semejantes sus lados son proporcionales:

$\frac{x}{1'5}=\frac{10}{1}$ x·1=1'5·10 x= 15m

Así que el edificio mide 15 metros.

Resuelve los siguientes problemas:

1.- Calcula la altura de un depósito de agua que da una sombra de 15 m de largo, si a la misma hora un bastón de 1 m de alto da una sombra de 1,8 m de largo.

2.- Una escalera de 10 m está apoyada contra la pared. Su pie está a 1,6 m de la base de la misma. ¿Cuánto dista de la pared el escalón situado a 2,4 m de altura?

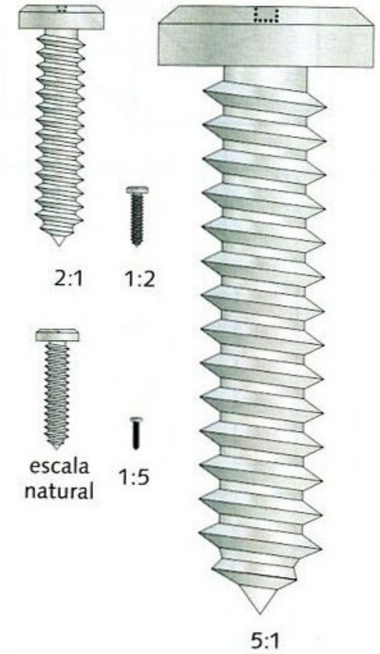
3.- Para subir la mercancía a un camión voy a colocar un tablón a modo de rampa apoyada en el suelo a 2 metros del camión, para subir una altura de 1'5 metros, ¿cuánto debe medir el tablón?

4.- Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.

3.- ESCALAS

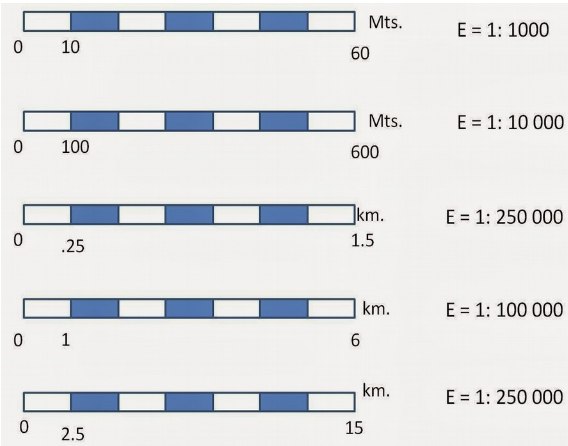
Una aplicación de la semejanza es la que tiene que ver con la representación de objetos reales en el plano, en un tamaño más pequeño o más grande, pero manteniendo la forma, es decir, la representación es semejante al objeto real. La relación matemática entre las dimensiones reales y las dimensiones de su representación/reproducción se denomina escala.

Hay tres tipos de escalas según la relación de la reproducción con lo que representa:



- Escala natural: Si la representación tiene el tamaño real.
- Escala de reducción: Si el tamaño de la representación es más pequeño que el real. Es la que se utiliza en mapas, planos y maquetas.
- Escala de ampliación: Si el tamaño de la representación es mayor que el tamaño real, por ejemplo para representar una pieza pequeña en la que se necesita ver el detalle.

Para expresar la escala hay tres métodos:



- Escala Numérica: Por ejemplo 1:1000 significa que 1 cm del plano equivalen a 1000 cm =10 m en la realidad
- Escala Gráfica: Se representa por un segmento divido en partes iguales, donde se indica la medida real.
- Escala unidad por unidad: Se especifica en una igualdad la equivalencia entre la representación y la realidad. Por ejemplo: 1cm=3km significa que 1 cm del plano equivalen a 3 km en la realidad

Cálculos con escalas: Hay tres tipos de problemas con escalas, el que consiste en determinar la medida real a partir de la representación, el que consiste en calcular la medida de la representación y el que consiste en hallar la escala cuando se tiene la representación y el objeto real. Hay que tener en cuenta que:

Medida Real = Medida del plano · Escala

Y por tanto

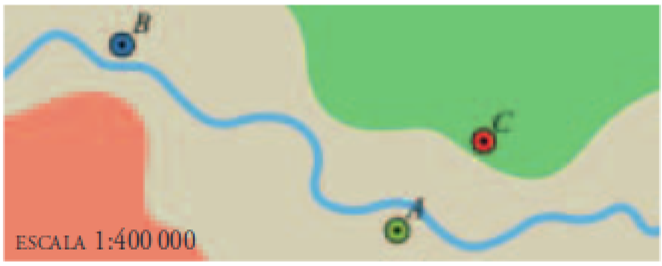
Medida del plano = Medida Real : Escala

y

Escala = Medida Real : Medida Plano

Ejemplos:

1. Cálculo de las medidas reales



	DISTANCIA EN EL PLANO		DISTANCIA REAL
$\overline{AB}$	4 cm	$\times$ 400 000 →	16 km
$\overline{BC}$	4,5 cm	$\times$ 400 000 →	18 km
$\overline{AC}$	1,7 cm	$\times$ 400 000 →	6,8 km

2. Cálculo de las medidas del plano:

En una escala 1:1000 un campo de fútbol que mide 45m x 90m tendría que estar representado en el plano por un rectángulo de dimensiones 4'5 x 9 cm, ya que 45 m= 4500 cm y 4500:1000=4'5 y 90 m= 9000 cm y 9000:1000=9 cm

3. Cálculo de la escala:

Un segmento en la realidad mide 1,40 m y así aparece acotado. Al medir con la regla sobre el dibujo, contabilizamos 7 cm. ¿Qué escala se ha aplicado? 7cm/1,40m = 7cm/140m=1/20 La escala es 1:20

Resuelve los siguientes problemas con escalas:

1.- Calcula la medida del círculo que tenemos que dibujar en el plano, sabiendo que la escala es de 1:100 y que el diámetro real vale 1 m.

2.- Calcula la escala del plano sabiendo que el largo real de una mesa es de 1,5 m y que su representación en el dibujo es de 15 cm.

3.- Calcula la altura real de un edificio de cinco plantas sabiendo que la escala del plano es 1:500 y que su representación en el dibujo es de 3 cm.

4.- La altura de una farola es de 8 m, si quiero dibujarla a escala 1:100,¿cuántos centímetros tendré que trazar en el plano?

5.- El ancho total real de una autovía es de 24 metros. Si el plano en el que se encuentra dibujada está a escala 1:200, ¿cuántos milímetros tendrá en el dibujo?

6.- A qué escala estará dibujado el plano del Instituto, si sabemos que la puerta principal de entrada tiene de ancho 3,40 m, y en el plano hemos medido con la regla 68 mm.

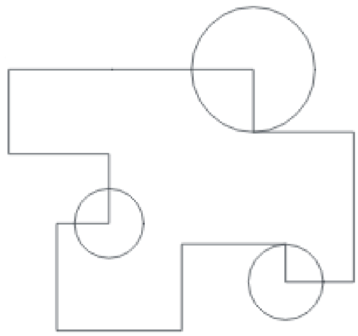
7.- En un plano se ve dibujado un río que mide de ancho 1 cm. Si la escala del plano es 1:25000, ¿cuánto mide en la realidad?

8.- Queremos dibujar a una escala de ampliación la aguja de un reloj que mide 1 cm. Si elegimos una escala 5:1, ¿cuánto medirá su representación en el dibujo?

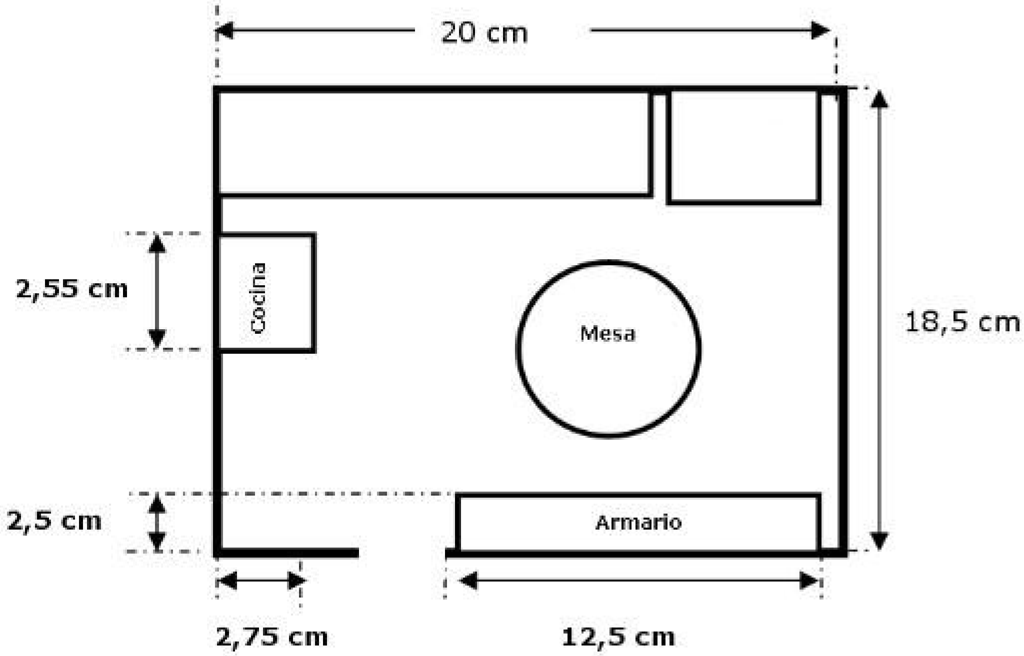
9.- En un plano de carreteras realizado a escala 1:50.000, la distancia entre dos ciudades, medida con una regla graduada es de 45 mm. ¿Cuál será la distancia en la realidad?

10.- Una pieza que realmente tiene una longitud de 100 cm está representada en un dibujo por un segmento de 4 cm. ¿A qué escala está dibujado el plano?

11.- Representa el dibujo siguiente a escala 1:2 y a escala 2:1 tomando previamente las medidas reales:



12 .- Calcular las medidas reales de la habitación del plano que está a escala 1:20.

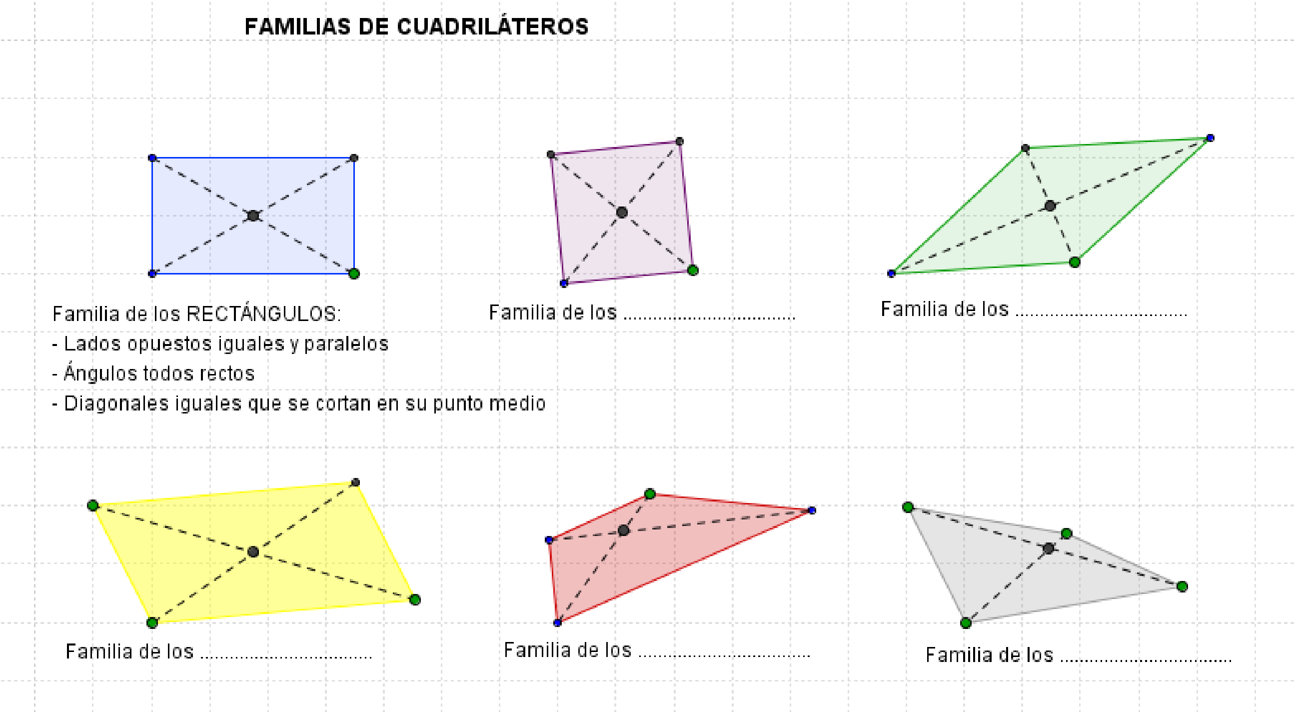


4.- Figuras planas: Cálculo de perímetros y áreas

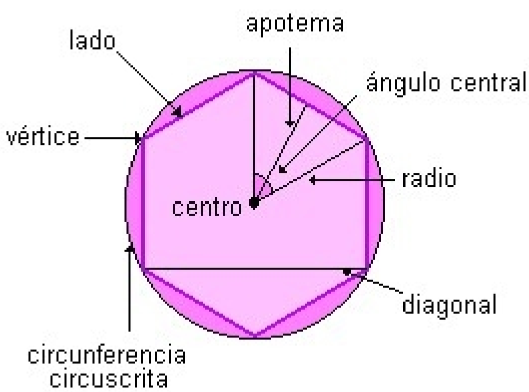
Prácticas con geogebra. Realiza las siguientes prácticas con Geogebra:

1.- ***Triángulos***: Representa un triángulo cualquiera, uno isósceles, otro equilátero. Representa las alturas y mueve el triángulo para que sea obtusángulo, rectángulo, acutángulo, ¿que ocurre con las alturas?

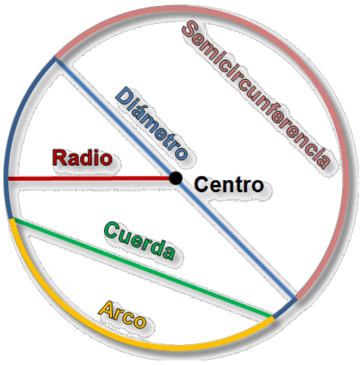
2.- ***Cuadriláteros:*** Representa un paralelogramo, un rombo, un cuadrado, un rectángulo, un trapecio y un trapezoide. Mide lados y ángulos y traza diagonales. Mueve los vértices y completa los datos:

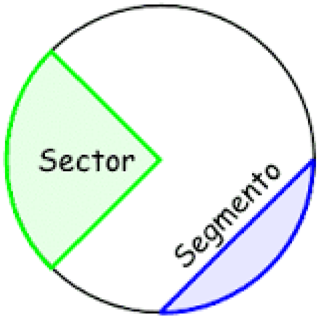


3.- ***Polígonos regulares:*** Representa un polígono regular y sus elementos:



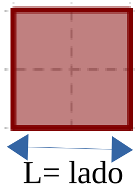
4.- ***Circulo y circunferencia:*** Representa la circunferencia y sus elementos y las zonas circulares que aparecen en los gráficos siguientes.





Para el cálculo de perímetros y áreas de figuras es importante descomponer o dividir las figuras en otras básicas de las que conocemos el área y el perímetro. Empecemos con esas figuras básicas.

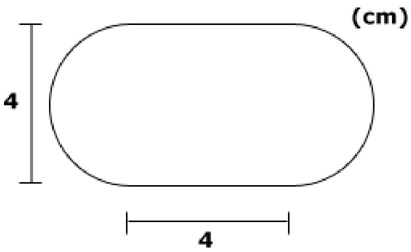
Entra en http://elprofelenin.blogspot.com.es/2013/05/areas-plantillas-con-geogebra.html y rellena la siguiente tabla como en el ejemplo:

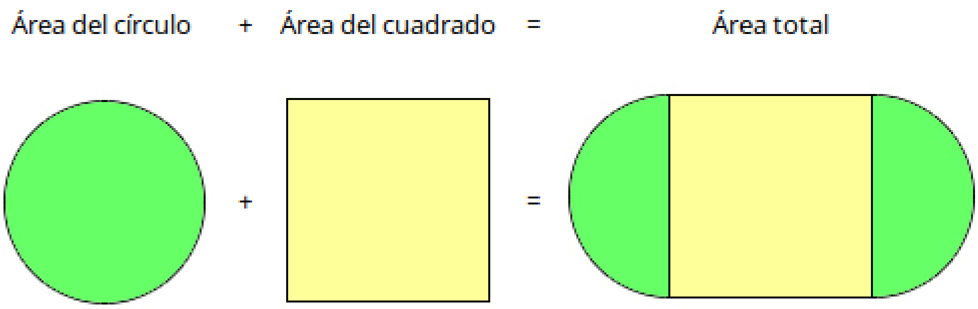
Nombre	***Características***	***Representación***	***Perímetro***	***Área***
Cuadrado	Cuadrilátero con lados iguales y ángulos rectos		P=4·L	$A=L^2$
Rectángulo				
Rombo				
Romboide				
Trapecio				
Triángulo				

Polígono regular				
Círculo				
Sector circular				

Cuando la figura no es una de las anteriores es posible dividirla o aproximarla por una o varias figuras básicas. Veamos los siguientes ejemplos:

1. Halla el área de la siguiente figura:



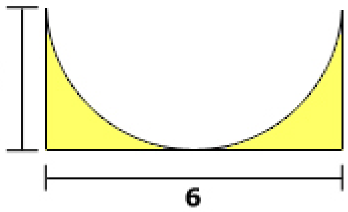


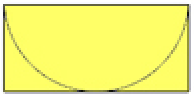
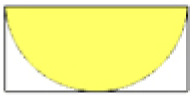
El radio mide: 4/2 = 2 cm

$2^2 \cdot p$	+	$4 \cdot 4$	=	Área total
12,56	+	16	=	28,56

Observa que el perímetro sería el del círculo y la mitad del perímetro del cuadrado (2πr+2L)

2. Halla el área de la siguiente figura:

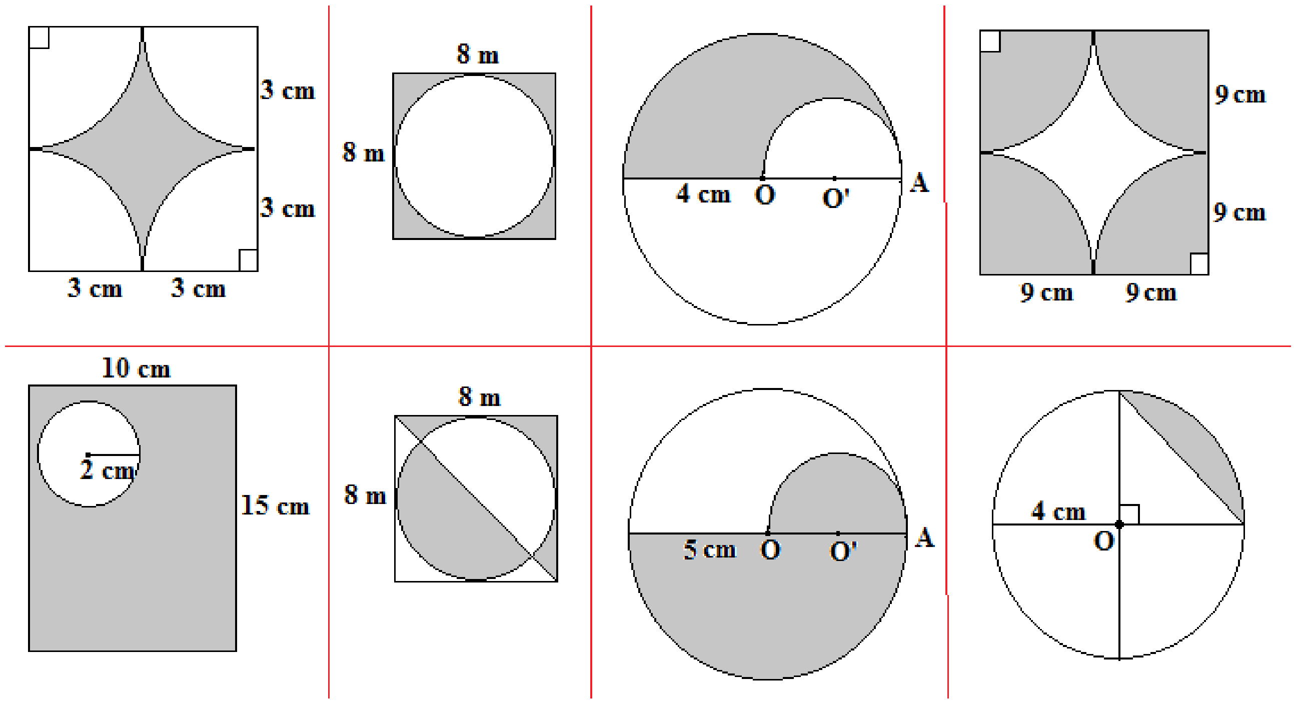


Área del rectángulo	-	Área del semicírculo	=	Área total
	-		=	
Base · Altura	-	$\frac{\text{Radio}^2 \cdot p}{2}$	=	Área total
3 · 6	-	$\frac{3^2 \cdot p}{2}$	=	Área total
18	-	14,13	≈	3,9

En este caso el perímetro se obtiene sumando al del semicírculo el perímetro del rectángulo menos el lado superior.

Resuelve los siguientes problemas:

1.- Calcula el área y el perímetro de las figuras sombreadas:



2.- Considera el siguiente plano.

a) Calcula el perímetro del dibujo y el real aplicando la escala.

b) Calcula el área del dibujo de cada recinto y el área total.

c) Calcula el área real de cada recinto y el área total